

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЫНКА ТРЕХ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ТОВАРОВ

Рассматривается динамическая модель конкурентного рынка трех взаимозаменяемых товаров в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора цен. Модель строится на основе учета экономических сил продавцов, покупателей, государства и экономических сил конкуренции. Используются функциональные выражения таких сил с учетом экономических законов товарного рынка. В модели предполагается, что объем продаж есть функция цены, зависит от параметров эластичностей, а экономическая система обладает равновесием. Исследована задача об устойчивости равновесия в основном и в критическом случае одного нулевого корня. Получены условия устойчивого развития рынка для симметричных и совпадающих характеристик товаров-конкурентов. Дано экономическое толкование результатов.

Ключевые слова: конкурентный рынок; динамическая модель; экономическое равновесие; устойчивость.

This paper presents the dynamic model of a competitive market of three interchangeable goods in the form of a system of nonlinear ordinary differential equations on a vector of prices. Model is built on the basis of economic forces sellers, buyers, the State and the economic forces of competition. We use a functional expression of such force, taking into account the economic laws of the product market. The model assumes that the volume of output is a function of prices, which depends on parameters of the elasticity and economic system has equilibrium. We investigated the problem of stability of equilibrium in the principal and critical case one zero root. The conditions of stable development market for symmetric and matching characteristics of goods-competitors are investigated. The economic interpretation of results is given.

Key words: competitive market; dynamic model; economic equilibrium; stability.

В работах [1, 2] представлены математические модели первого порядка конкурентных рынков произвольного числа взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров или услуг, где искомыми функциями времени являются товарные цены. Изучены условия устойчивости рыночного равновесия в основном

и в ряде критических случаев и выделены определенные характеристики экономического характера [3]. Поскольку эти модели описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, то анализ таких систем связан с известными трудностями теории дифференциальных уравнений. В работах [4–12] детально изучаются частные случаи рынка одного и двух товаров, где наряду с исследованием задачи об устойчивости экономического равновесия сформулирована и решена задача об оптимальной налоговой политике, а также рассмотрены другие проблемы. Исследованию объединенной модели производства и торговли посвящены работы [13–16]. Благодаря этим усилиям, основанным на детально разработанной качественной теории двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рынок двух товаров-конкурентов достаточно хорошо изучен. Что касается анализа динамики рынка трех товаров, то здесь картина иная, известны лишь отдельные работы, основанные, как правило, на модели Вальраса [12, 17], где в основном используется только один параметр – излишек спроса.

В настоящей статье исследуется модель рынка трех взаимозаменяемых товаров или услуг [1], где учитываются зависимости поведения цен от нижних и верхних значений интервала допустимых цен, эластичностей спроса по цене и от уровня влияния основных участников торговли – покупателей, продавцов, государства и сил конкуренции.

1. Рассмотрим математическую модель рынка [1] трех взаимозаменяемых конкурирующих товаров:

$$\dot{p}_j = -\frac{v_j p'_j (p_j - p_j^0)}{p_j - p_j^*} - \frac{d_j p''_j (p_j - p_j^0)}{p_j^{**} - p_j} + \frac{r_j}{q_j^0} (p_j q_j(p) - p_j^0 q_j^0) - \sum_{i=1, i \neq j}^3 c_{ji} ((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

которая определена в параллелепипеде допустимых цен

$$p_j^* < p_j < p_j^{**}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где v_j, d_j, r_j и c_{ji} – постоянные коэффициенты, отражающие интенсивности экономических сил для продавцов, покупателей, государства и сил конкуренции соответственно; $p_j(t)$ – цена единицы j -го товара в момент времени t ; p_j^0 – равновесная цена j -го товара; $q_j(t)$ – количество единиц j -го товара, продаваемого в момент t ; q_j^0 – равновесное количество единиц j -го товара; p_j^* – нижнее пороговое значение цены j -го товара, связанное с затратами продавца; p_j^{**} – верхнее (потолочное) значение цены j -го товара, выше которого покупатели отказываются приобретать данный товар; p'_j – излишек цены продавца, $p'_j = p_j^* - p_j$; p''_j – излишек цены покупателей, $p''_j = p_j^{**} - p_j$.

Пусть для j -го товара-конкурента $q_j = q_j(p)$ – функция объемов продаж вектора цен $p = (p_1, p_2, p_3)$ линейна и задается формулой [1]

$$q_j(p) = q_j^0 - e_j \frac{q_j^0}{p_j^0} (p_j - p_j^0) + \sum_{i=1, i \neq j}^3 e_{ji} \frac{q_j^0}{p_i^0} (p_i - p_i^0), \quad (3)$$

где $e_j > 0$ и $e_{ji} > 0$ – ценовая эластичность спроса j -го товара и перекрестная эластичность спроса j -го товара по цене i -го товара (в точке $p = p^0$) соответственно.

2. Исследуем устойчивость экономического равновесия $p_j = p_j^0$, $j = 1, 2, 3$, системы (1) при условиях (2), (3) по первому приближению, т. е. для достаточно малых возмущений. Для этого сделаем в системе (1) замену переменных $x_j = p_j - p_j^0$, $j = 1, 2, 3$. Тогда для компонент вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ таких, что $-p'_j < x_j < p''_j$, получим систему уравнений

$$\dot{x}_j = -\frac{v_j p'_j x_j}{x_j + p'_j} - \frac{d_j p''_j x_j}{p''_j - x_j} - c_j x_j + \sum_{i=1, i \neq j}^3 c_{ji} x_i + \frac{r_j}{q_j^0} ((x_j + p_j^0) q_j(x + p^0) - p_j^0 q_j^0),$$

где $c_j = \sum_{i=1, i \neq j}^3 c_{ji}$, а функция объемов продаж $q_j(x + p^0) = q_j^0 - e_j \frac{q_j^0}{p_j^0} x_j + \sum_{i=1, i \neq j}^3 e_{ji} \frac{q_j^0}{p_i^0} x_i$. После подстановки функции $q_j(x + p^0)$ соответственно получаем

$$\dot{x}_j = -\frac{v_j p'_j x_j}{x_j + p'_j} - \frac{d_j p''_j x_j}{p''_j - x_j} + (-c_j + r_j(1 - e_j)) x_j + r_j \sum_{i=1, i \neq j}^3 \left(c_{ji} + e_{ji} \frac{p_j^0}{p_i^0} \right) x_i - \frac{r_j}{p_j^0} e_j x_j^2 + r_j x_j \sum_{i=1, i \neq j}^3 \frac{e_{ji}}{p_i^0} x_i, \quad (4)$$

$$-p'_j < x_j < p''_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Экономическое равновесие теперь – это начало координат $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Выделим в системе (4) линейное приближение в окрестности точки $x = 0$:

$$\dot{x}_j = -S_j x_j + \sum_{i=1, i \neq j}^3 C_{ji} x_i, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где S_j – запас прочности рынка j -го товара [1], $S_j = v_j + d_j - r_j(1 - e_j) + c_j$ и положено

$$C_{ji} = c_j + (r_j e_{ji} p_j^0) / p_i^0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i \neq j). \quad (6)$$

Уравнения (5) можно определить как линейную модель рынка трех товаров в переменных $x_j = p_j - p_j^0$ – отклонений цен от равновесных состояний. Выделим ряд отдельных случаев.

Однородность рыночных характеристик товаров-конкурентов. Предположим, что реализуемые блага обладают определенной идентичностью некоторых из своих параметров таким образом, что матрица $C = (C_{ji})$ коэффициентов модели (5) симметрична. Тогда для простоты можно положить $C_{12} = C_{21} = C_1$, $C_{23} = C_{32} = C_2$, $C_{13} = C_{31} = C_3$ и записать характеристическое уравнение матрицы системы (5), (6) в виде

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (7)$$

$$a_1 = (S_1 + S_2 + S_3); \quad a_2 = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2; \quad a_3 = S_1 S_2 S_3 - C_2^2 S_1 - C_3^2 S_2 - C_1^2 S_3 - 2C_1 C_2 C_3.$$

Поэтому условия асимптотической устойчивости экономического равновесия (критерий Рауса – Гурвица для (7)) записываются в виде

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3.$$

В подробной записи они имеют вид соотношений

$$S_1 + S_2 + S_3 > 0; \quad S_1 S_2 S_3 - S_1 C_2^2 - S_2 C_3^2 - S_3 C_1^2 - 2C_1 C_2 C_3 > 0;$$

$$(S_1 + S_2 + S_3)(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2) > S_1 S_2 S_3 - S_1 C_2^2 - S_2 C_3^2 - S_3 C_1^2 - 2C_1 C_2 C_3. \quad (8)$$

Дать полный экономический анализ неравенств (8) достаточно сложно. Выделим случаи, отвечающие тем или иным рыночным ситуациям. Предположим, что выполнены следующие условия:

- экономическая сила государства имеет одинаковый эффект воздействия на всех продавцов;
- перекрестные ценовые эластичности спроса всех товаров совпадают;
- запасы прочности двух из трех товаров-конкурентов одинаковы.

Для модели (5) эти условия отвечают следующим требованиям:

$$r_j = r, \quad e_{ji} = e^*, \quad p_j^0 = p_i^0 = p^0, \quad C_{ji} = C = c + r e^*, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{и} \quad S_2 = S_3. \quad (9)$$

С учетом (9) условия асимптотической устойчивости (8) можно преобразовать к виду

$$S_1 + 2S_2 > 0, \quad (S_2 + C)(S_1 S_2 - C S_1 - 2C^2) > 0; \quad (S_1 + S_2 - C)(S_1 S_2 + S_2^2 + C S_2 - C^2) > 0. \quad (10)$$

Можно исследовать эту систему неравенств относительно переменной S_1 , а затем перейти на плоскость.

Анализ условий (10) дает решение на плоскости переменных (S_1, S_2) в виде множества точек, схематично представленных двумя заштрихованными областями (рисунок). Отметим, что наряду с областью, где все запасы прочности положительны (в первой четверти $S_1 > 0, S_2 = S_3 > 0$), имеется и область, где либо $S_1 < 0, S_2 = S_3 > 0$, либо $S_1 > 0, S_2 = S_3 < 0$.

Абсолютно симметричный случай. Предположим теперь, что представленные на рынке блага симметричны по своим характеристикам, а именно, наряду с условиями (10) выполняются также и условия постоянства параметров

$$v_j = v, \quad d_j = d, \quad e_j = e, \quad j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

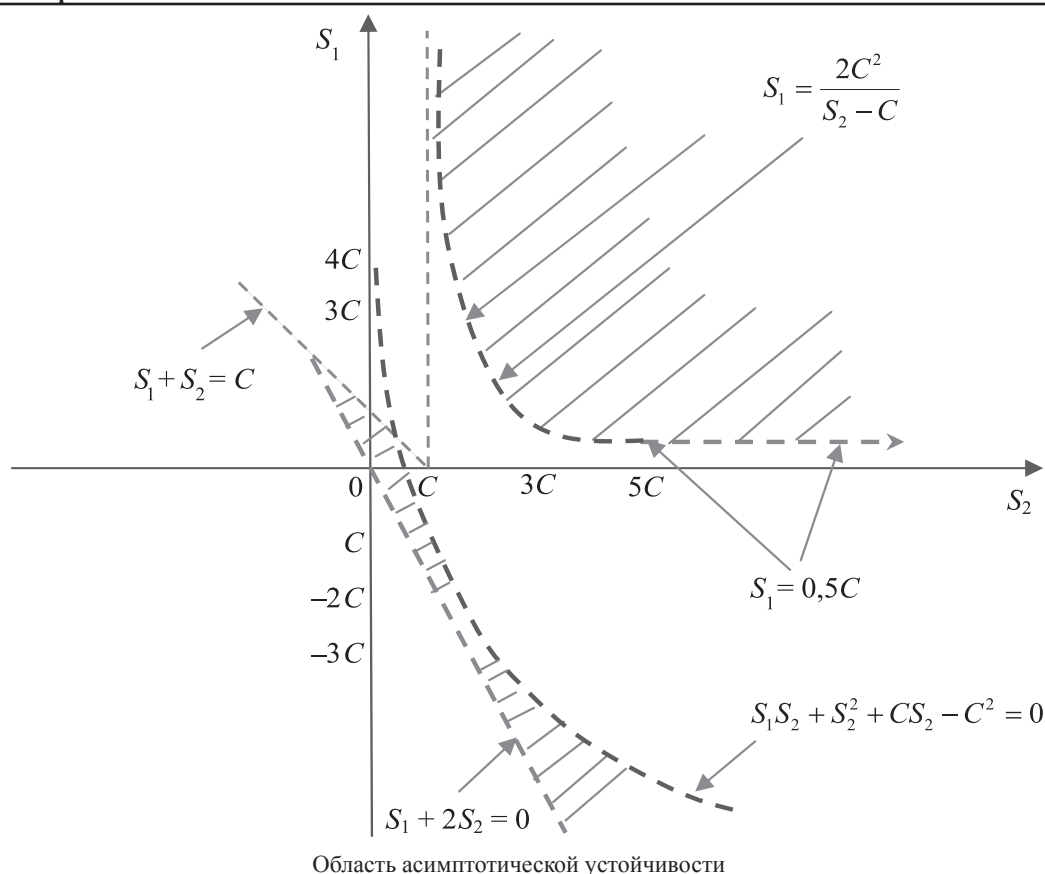
Тогда запасы прочности рынка товаров идентичны, $S_j = S$, и система (5) принимает вид

$$\dot{x}_j = -S x_j + C \sum_{i=1, i \neq j}^3 x_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $S = v + d - r(1 - e) + 2c$, $C = c + r e^*$. Здесь характеристическое уравнение представляется равенством

$$(\lambda + S + C)^2 (\lambda + S - 2C) = 0. \quad (12)$$

Поэтому если $S > 2C$, то все корни имеют отрицательные действительные части, что соответствует асимптотической устойчивости равновесия.



При $S < 2C$ равновесие системы (5) неустойчиво.

Рассмотрим случай $S > 2C$. С учетом принятых обозначений это равносильно неравенству

$$r(1 - e + 2e^*) < v + d. \quad (13)$$

В зависимости от знака величины $(1 - e + 2e^*)$ следует проанализировать два случая.

1. Если $e < 1 + 2e^*$ (ограниченная эластичность спроса по цене), то равновесие асимптотически устойчиво при выполнении условия (13). Отсюда видно, что в случае ограниченной эластичности спроса по цене увеличение налоговой ставки может привести к нарушению устойчивости рынка.

2. Если же выполняется обратное неравенство $e \geq 1 + 2e^*$ (эластичный спрос по цене), то условие (13) всегда выполняется. Таким образом, рынок трех однородных товаров с эластичным ценовым спросом способен устойчиво функционировать при высоких налогах.

Аналогично этому получаем неустойчивость экономического равновесия модели (1), если

$$e < 1 + 2e^*, \quad v + d < r(1 - e + 2e^*),$$

что в условиях ограниченной ценовой эластичности спроса означает достаточно высокий уровень налогообложения.

Критический случай одного нулевого корня. Изучим проблему устойчивости нелинейной модели в абсолютно симметричном случае (выполнение равенств (9) и (11)), когда один из корней характеристического уравнения (12) равен нулю. Из равенства (12) вытекают следующие возможные ситуации.

При $S = 2C$ имеем *критический случай одного нулевого корня* [18]. Здесь два других корня $\lambda_1 = -3C$ и $\lambda_2 = -6C$ отрицательны и задача об устойчивости равновесия требует дополнительных исследований.

При $S = -C$ имеем два нулевых корня и один положительный корень $\lambda = 3C$, а значит, равновесие неустойчиво.

Критический случай наличия пары чисто мнимых корней невозможен.

Таким образом, в нелинейной модели (4) остается неисследованной ситуация, когда $S = 2C$, т. е. $v + d = r(1 - e + 2e^*)$. Пусть это выполняется. Запишем модельную систему (4) в абсолютно симметричном случае, представив ее правые части с помощью рядов Тейлора в окрестности начала координат \mathbb{R}^3 с точностью до слагаемых третьего порядка малости. Несложные вычисления дают систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2Cx_1 + Cx_2 + Cx_3 + H_2(x_1)^2 - H_3(x_1)^3 + Rx_1x_2 + Rx_1x_3 + o(\|x\|^3), \\
\dot{x}_2 &= Cx_1 - 2Cx_2 + Cx_3 + H_2(x_2)^2 - H_3(x_2)^3 + Rx_1x_2 + Rx_2x_3 + o(\|x\|^3), \\
\dot{x}_3 &= Cx_1 + Cx_2 - 2Cx_3 + H_2(x_3)^2 - H_3(x_3)^3 + Rx_3x_2 + Rx_1x_3 + o(\|x\|^3),
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$C = c + re^*, \quad H_2 = \frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} - \frac{re}{p^0}, \quad H_3 = \frac{v}{(p')^2} + \frac{d}{(p'')^2}, \quad R = \frac{re^*}{p^0}. \tag{15}$$

Замена переменных

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3; \\
x_1 &= y_1 - y_2 - y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3
\end{aligned}$$

приводит матрицу линейного приближения системы (14) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & -3C & 0 \\ C & 0 & -3C \end{pmatrix}.$$

Выпишем уравнения модели в новых переменных с точностью до слагаемых третьего порядка малости в окрестности начала координат:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_1^2 H_2 + 2y_1 y_2 (R - H_2) + 2y_1 y_3 (R - H_2) + 2y_2 y_3 (H_2 - R) + 2y_2^2 (H_2 - R) + \\
&+ 2y_3^2 (H_2 - R) + H_3 (-y_1^3 + 3y_1^2 y_2 - 3y_1 y_2^2 + 3y_2^2 y_3 + 3y_2 y_3^2 + 3y_1^2 y_3 - 3y_1 y_3^2), \\
\dot{y}_2 &= Cy_1 - 3Cy_2 + y_2^2 (H_2 - R) + Ry_1 y_2 - H_3 y_2^3, \\
\dot{y}_3 &= Cy_1 - 3Cy_3 + y_3^2 (H_2 - R) + Ry_1 y_3 - H_3 y_3^3.
\end{aligned} \tag{16}$$

Согласно общей теории исследования критических случаев [18] найдем решение $y_2 = u_2(y_1)$ и $y_3 = u_3(y_1)$ системы уравнений в неявных функциях

$$\begin{aligned}
Cy_1 - 3Cy_2 + y_2^2 (H_2 - R) + Ry_1 y_2 - H_3 y_2^3 + \dots &= 0, \\
Cy_1 - 3Cy_3 + y_3^2 (H_2 - R) + Ry_1 y_3 - H_3 y_3^3 + \dots &= 0
\end{aligned}$$

в виде рядов $u_2(y_1) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \alpha_3 y_1^3 + \dots$ и $u_3(y_1) = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_1^2 + \beta_3 y_1^3 + \dots$ с неопределенными коэффициентами α_j и β_j . Стандартная процедура поиска коэффициентов дает

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3}; \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{H_2 + 2R}{27C}; \quad \alpha_3 = \beta_3 = \frac{2(H_2 - R)\alpha_1\alpha_2 + R\alpha_2 - H_3(\alpha_1)^3}{3C}.$$

Таким образом, с точностью до членов третьего порядка малости имеем

$$u_2(y_1) = u_3(y_1) = \frac{1}{3}y_1 + \frac{H_2 + 2R}{27C}y_1^2 + \frac{2(H_2 - R)\alpha_1\alpha_2 + R\alpha_2 - H_3(\alpha_1)^3}{3C}y_1^3. \tag{17}$$

Подставляем теперь выражения (17) в первое (критическое) уравнение системы. Для этого преобразуем сначала в правой части этого уравнения многочлены второго порядка (с точностью до слагаемых третьего порядка малости). Имеем

$$\begin{aligned}
y_1^2 H_2 + 2y_1 y_2 (R - H_2) + 2y_1 y_3 (R - H_2) + 2y_2 y_3 (H_2 - R) + 2y_2^2 (H_2 - R) + 2y_3^2 (H_2 - R) = \\
= \frac{H_2 + 2R}{3}y_1^2 + \frac{8R(H_2 + 2R)}{3^5 C}y_1^3 + \dots
\end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом и с многочленами третьего порядка первого уравнения (16), получим представление

$$H_3(-y_1^3 + 3y_1^2 y_2 - 3y_1 y_2^2 + 3y_2^2 y_3 + 3y_2 y_3^2 + 3y_1^2 y_3 - 3y_1 y_3^2) = H_3 \frac{5}{9}y_1^3 + o(\|y_1\|^3).$$

Таким образом, критическое уравнение преобразуется к виду

$$\dot{y}_1 = \frac{H_2 + 2R}{3} y_1^2 + \frac{135CH_3 + 8R(H_2 + 2R)}{3^5 C} y_1^3 + o(|y_1|^3), \quad (18)$$

где величины H_2 , H_3 и R определяются формулами (15).

С учетом результатов исследования критического случая одного нулевого корня [18] получаем, что при $H_2 + 2R \neq 0$ равновесие неустойчиво. Если же $H_2 + 2R = 0$, то коэффициент при y_1^3 в выражении (18) является положительным, и мы также имеем случай неустойчивости равновесия.

Результаты исследований абсолютно симметричного случая представим в виде теоремы.

Теорема. *Предположим, что для модели (1) выполнены условия (9) и (11). Тогда экономическое равновесие $p_j = p_j^0$, $j = 1, 2, 3$, будет асимптотически устойчивым в каждом из следующих случаев:*

1) $e \geq 1 + 2e^*$;

2) $e < 1 + 2e^*$, $v + d > r(1 - e + 2e^*)$.

Равновесие будет неустойчивым, если:

3) $e < 1 + 2e^*$, $v + d \leq r(1 - e + 2e^*)$.

Здесь H_2 , H_3 , C , R определяются формулами (15).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. К а л и т и н Б. С. Динамическая модель рынка типа «эффективная конкуренция» // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 1997. № 2. С. 68–70.
2. К а л и т и н Б. С. Динамическая модель рынка типа «эффективная конкуренция». Неотрицательный запас прочности // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 1998. № 2. С. 41–45.
3. K h u s a i n o v T., K a l i t i n B. On dynamical pricing model // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2002. № 3. P. 131–137.
4. К а л и т и н Б. С. Устойчивость динамической модели монопольного рынка // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2003. № 3. С. 67–72.
5. К а л и т и н Б. С., Т р у х а н Е. В. Об оптимальной налоговой политике на рынке двух взаимозаменяемых товаров // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2008. № 3. С. 80–85.
6. К а л и т и н Б. С., П р и с т р е м Е. А. Модель первого порядка рынка двух конкурентов с эффектом рекламы // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2009. № 2. С. 74–81.
7. К а л и т и н Б. С., Б е з р у к В. В. Модель первого порядка монопольного рынка // Тр. Ин-та математики. 2009. Т. 17, № 1. С. 61–70.
8. К а л и т и н Б. С., Т р у х а н Е. В. Устойчивость рынка двух взаимозаменяемых товаров // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2011. № 2. С. 91–95.
9. К а л и т и н Б. С. Математические модели первого порядка конкурентного рынка. Минск, 2011.
10. К а л и т и н Б. С., Т р у х а н Е. В. Устойчивость рынка двух взаимодополняющих товаров // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. // НИЭИ М-ва экономики Респ. Беларусь. Минск, 2011. Вып. 5. С. 213–225.
11. К а л и т и н Б. С., Т р у х а н Е. В. Динамическая модель рынка двух товаров с нулевым запасом прочности // Управление экономическими системами [Электронный ресурс]. 2011. № 11 (35). Режим доступа: <http://uecs.ru/uecs-35-352011/item/819-2011-11-30-08-46-51>. № ГР 0421100034/0500 (дата обращения: 15.11.2011).
12. Ч е р в о н н а я Е. А. Исследование математических динамических моделей рынка вальрасовского типа : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18. Томск, 2007.
13. Б а л а ц к и й Е. В. Рыночное ценообразование и производственные циклы // Экономика и математические методы. 2005. Т. 41, № 1. С. 37–44.
14. К а л и т и н Б. С., С у щ Т. Б. Динамическая модель производства и реализации продукции // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 1. С. 110–116.
15. К а л и т и н Б. С., С о л о в ъ е в а А. С. Устойчивость динамической модели реализации продуктов с учетом издержек производства // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. // НИЭИ М-ва экономики Респ. Беларусь. Минск, 2013. Вып. 7. С. 159–165.
16. К а л и т и н Б. С. Устойчивость равновесия конкурентного рынка (Динамическая модель рынка). Саарбрюккен, 2012.
17. A g g o w K. J., H u r w i c z L. On the Stability of the Competitive Equilibrium, I // Econometrica. 1958. Vol. 26. P. 522–552.
18. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. ; Л., 1950.

Поступила в редакцию 18.12.2013.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики.